



ສາທາລະນະລັດ ປະຊາທິປະໄຕ ປະຊາຊົນລາວ

ສັນຕິພາບ ເອກະລາດ ປະຊາທິປະໄຕ ເອກະພາບ ວັດທະນະຖາວອນ

-----000-----



ກະຊວງສຶກສາທິການ ແລະ ກິລາ

ກົມມັດທະຍົມສຶກສາ

ຫົວບົດສອບເສັງແຂ່ງຂັນນັກຮຽນເກັ່ງ ຊັ້ນມັດທະຍົມສຶກສາຕອນປາຍ

ລະດັບຊາດ ປະຈຳສົກຮຽນ 2015-2016

ວິຊາ ຄະນິດສາດ

ເວລາ: 120 ນາທີ

- ຈົ່ງພິສູດວ່າພະຫຸພົດ  $P(x) = x^{n+1} - x^n - x + 1$  ຫານຂາດໃຫ້  $(x-1)^2$
- ຈົ່ງຄິດໄລ່ຜົນບວກ  $S = \sum_{i=0}^{101} \frac{x_i^3}{1-3x_i+3x_i^2}$ , ດ້ວຍ  $x_i = \frac{i}{101}$
- ຈົ່ງພິສູດວ່າສົມຜົນ:  $x^2 \cos x + x \sin x = -1$  ມີຢ່າງໜ້ອຍໜຶ່ງໃຈຜົນໃນ  $\mathbb{R}$
- ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າຂອງ  $x$  ຈາກອັນດັບທະວີບວກ: 1, 4, 7, ... ຮູ້ວ່າ:  
 $(x+1) + (x+4) + \dots + (x+28) = 155$
- ໃຫ້  $a, b, c, d$  ເປັນອັດຕາສ່ວນກົງກັບ  $A, B, C, D$  ຕາມລຳດັບ. ຈົ່ງພິສູດວ່າ:  
 $\sqrt{aA} + \sqrt{bB} + \sqrt{cC} + \sqrt{dD} = \sqrt{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}$
- ໃຫ້ກຸ່ມ  $A, B, C, D$  ແລະ  $E$  ຈົ່ງຄັດຈັອນກຸ່ມ:  $(A \cap B) \cap (C \cap D) \cap (B \cup E)'$
- ຈົ່ງຊອກຫາທຸກອັນດັບທະວີຄູນທີ່ມີ 7 ພົດ; ແຕ່ລະພົດເປັນຈຳນວນຈິງ ເມື່ອຮູ້ວ່າ ຜົນບວກຂອງສາມພົດທຳອິດເທົ່າກັບ 2 ແລະ ຜົນບວກຂອງສາມພົດສຸດທ້າຍເທົ່າກັບ 1250.
- ໃຫ້  $a, b, c$  ແມ່ນລວງຍາວຂອງບັນດາຂ້າງ ແລະ  $S$  ແມ່ນເນື້ອທີ່ຂອງຮູບສາມແຈ  $ABC$ .  
ຈົ່ງພິສູດວ່າ:  $\cotan A + \cotan B + \cotan C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$

ຄະນະກຳມະການອອກຫົວບົດ



ສາທາລະນະລັດ ປະຊາທິປະໄຕ ປະຊາຊົນລາວ



ສັນຕິພາບ ເອກະລາດ ປະຊາທິປະໄຕ ເອກະພາບ ວັດທະນາຖາວອນ

----=000=----

ກະຊວງສຶກສາທິການ ແລະ ກິລາ

ກົມມັດທະຍົມສຶກສາ

ຂະໜານຕອບຫົວບົດສອບເສັງແຂ່ງຂັນນັກຮຽນເກັ່ງຊັ້ນມັດທະຍົມສຶກສາຕອນປາຍ

ລະດັບຊາດປະຈຳສົກຮຽນ 2015-2016

ວິຊາ ຄະນິດສາດ ເວລາ: 120 ນາທີ

ລຳດັບ	ຄຳຕອບ	ຄະແນນ
1	ຈົ່ງພິສູດວ່າພະຫຸມິດ $P(x) = x^{n+1} - x^n - x + 1$ ຫານຂາດໃຫ້ $(x-1)^2$	
	$P(x) = x^{n+1} - x^n - x + 1$ $= x^n(x-1) - (x-1)$ $= (x-1)(x^n - 1)$	0,5
	$= (x-1)^2(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - \dots - 1)$ <p>ດັ່ງນັ້ນ, <math>P(x) = x^{n+1} - x^n - x + 1</math> ຫານຂາດໃຫ້ <math>(x-1)^2</math></p>	0,5
2	ຈົ່ງຄິດໄລ່ຜົນບວກ $S = \sum_{i=0}^{101} \frac{x_i^3}{1-3x_i+3x_i^2}$ , ດ້ວຍ $x_i = \frac{i}{101}$	
	$S = \sum_{i=0}^{101} \frac{\left(\frac{i}{101}\right)^3}{1-3\left(\frac{i}{101}\right)+3\left(\frac{i}{101}\right)^2} = \sum_{i=0}^{101} \frac{i^3}{101^3 - 3(102)^2i + 3(101)i^2} = \sum_{i=0}^{101} \frac{i^3}{(101-i)^3 + i^3}$	0,5
	$= \frac{1^3}{100^3 + 1^3} + \frac{2^3}{99^3 + 2^3} + \dots + \frac{50^3}{51^3 + 50^3} + \frac{51^3}{50^3 + 51^3} + \dots + \frac{99^3}{2^3 + 99^3} + \frac{100^3}{1^3 + 100^3} + 1$	0,5
	$= \left(\frac{1^3}{100^3 + 1^3} + \frac{100^3}{1^3 + 100^3}\right) + \left(\frac{2^3}{99^3 + 2^3} + \frac{99^3}{2^3 + 99^3}\right) + \dots + \left(\frac{50^3}{51^3 + 50^3} + \frac{51^3}{50^3 + 51^3}\right) = 51$	0,5
3	ຈົ່ງພິສູດວ່າ ສົມຜົນ: $x^2 \cos x + x \sin x = -1$ ມີຢ່າງໜ້ອຍໜຶ່ງໃຈຜົນໃນ $R$	
	ໃຫ້ຕຳລາ $f(x) = x^2 \cos x + x \sin x + 1$ ເຫັນວ່າ $f(0) = 1 > 0$ $f(\pi) = -\pi^2 + 1 < 0$	0,5
	$f$ ເປັນຕຳລາທີ່ກຳນົດ ແລະ ຕໍ່ເນື່ອງໃນ $R$ ; ສະນັ້ນ $f$ ກໍ່ຕໍ່ເນື່ອງໃນຫວ່າງ $[0; \pi]$ ເຫັນວ່າ	0,5

	$0 \in [f(\pi); f(0)]$ ສະນັ້ນ; ສົມຜົນ $x^2 \cos x + x \sin x = -1$ ຈຶ່ງມີຢ່າງໜ້ອຍໜຶ່ງໃຈຜົນໃນ $R$	
4	ຈົ່ງຊອກຫາຄ່າຂອງ $x$ ຈາກອັນດັບທະວີບວກ: 1, 4, 7, ... ເມື່ອຮູ້ $(x+1) + (x+4) + \dots + (x+28) = 155$	
	ນຳໃຊ້ສູດພົດທົ່ວໄປຂອງອັນດັບທະວີບວກ $a_n = a_1 + (n-1)d$ ເຮົາມີ: $x+28 = x+1 + (n-1)d$ $x+28 = x+1 + (n-1)3$ ຖອນໄດ້ $n=10$	0,5
	ແລະຈາກ $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ ເຮົາມີ $155 = \frac{10(2x+29)}{2} \Leftrightarrow 20x+290 = 310$ ຖອນໄດ້ $x=1$	0,5
5	ໃຫ້ $a, b, c, d$ ເປັນອັດຕາສ່ວນກົງກັບ $A, B, C, D$ ຕາມລຳດັບ. ຈົ່ງພິສູດວ່າ: $\sqrt{aA} + \sqrt{bB} + \sqrt{cC} + \sqrt{dD} = \sqrt{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}$	
	ເຮົາມີ $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{d}{D} = \frac{a+b+c+d}{A+B+C+D} = k$ ຖອນໄດ້ $a = k.A, b = k.B, c = k.C, d = k.D$	0,5
	ເອົາແທນເຂົ້າ: $\sqrt{aA} + \sqrt{bB} + \sqrt{cC} + \sqrt{dD}$ ເຮົາໄດ້: $= \sqrt{kA^2} + \sqrt{kB^2} + \sqrt{kC^2} + \sqrt{kD^2}$ $= \sqrt{k(A+B+C+D)^2}$	0,5
	$= \sqrt{\frac{(a+b+c+d)}{A+B+C+D} (A+B+C+D)^2}$ $= \sqrt{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}$ ດັ່ງນັ້ນ: $\sqrt{aA} + \sqrt{bB} + \sqrt{cC} + \sqrt{dD} = \sqrt{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}$	0,5
6	ໃຫ້ກຸ່ມ $A, B, C, D$ ແລະ $E$ ຈົ່ງຄັດຈ້ອນກຸ່ມ: $(A \cap B) \cap (C \cap D) \cap (B \cup E)'$	
	$(A \cap B) \cap (C \cap D) \cap (B \cup E)'$ $\equiv (A \cap B) \cap (C \cap D) \cap (B' \cap E')$ $\equiv A \cap B \cap C \cap D \cap B' \cap E'$ $\equiv (B \cap B') \cap (A \cap C \cap D \cap E') \equiv \emptyset$	1
7	ຈົ່ງຊອກຫາທຸກອັນດັບທະວີຄູນທີ່ມີ 7 ພົດ; ແຕ່ລະພົດເປັນຈຳນວນຈິງ ເມື່ອຮູ້ວ່າ ຜົນບວກຂອງສາມ ພົດທຳອິດເທົ່າກັບ 2 ແລະ ຜົນບວກຂອງສາມສຸດທ້າຍເທົ່າກັບ 1250.	
	ເອີ້ນ: $a_1; a_2; \dots; a_7$ ເປັນພົດຂອງອັນດັບທີ່ຊອກຫາ ເຮົາມີ: $a_1 + a_2 + a_3 = 2$	0,5

	ເຮົາໄດ້: $a_1(1+r+r^2)=2\dots\dots\dots(1)$ ເຮົາມີ: $a_5+a_6+a_7=1250$ ເຮົາໄດ້: $a_1(r^4+r^5+r^6)=1250\dots\dots\dots(2)$	
	ເອົາ (2)÷(1) ເຮົາໄດ້: $r^4=625 \Rightarrow r=\pm 5$ - ເອົາ $r=5$ ແທນໃສ່ (1) ເຮົາໄດ້: $a_1 = \frac{2}{31}$ - ເອົາ $r=-5$ ແທນໃສ່ (1) ເຮົາໄດ້: $a_1 = \frac{2}{21}$ ອັນດັບທີ່ຊອກແມ່ນ: <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\frac{2}{31}; \frac{10}{31}; \frac{50}{31}; \frac{250}{31}; \frac{1250}{31}; \frac{6250}{31}; \frac{31250}{31}</math></li> <li>• <math>\frac{2}{21}; -\frac{10}{21}; \frac{50}{21}; -\frac{250}{21}; \frac{1250}{21}; -\frac{6250}{21}; \frac{31250}{21}</math></li> </ul>	0,5
8	ໃຫ້ $a, b, c$ ແມ່ນລວງຍາວຂອງບັນດາຂ້າງ ແລະ $S$ ແມ່ນເນື້ອທີ່ ຂອງຮູບສາມແຈ $ABC$ . ຈົ່ງພິສູດວ່າ: $\cotan A + \cotan B + \cotan C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$	
	ອີງຕາມຫຼັກເກນໂກຊິນເຮົາມີ: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $= b^2 + c^2 - 2bc \sin A \frac{\cos A}{\sin A}$ $= b^2 + c^2 - 4S \cotan A$ (1) ເພາະວ່າ $S = \frac{1}{2} bc \sin A$	0,5
	ດ້ວຍວິທີດຽວກັນນີ້ເຮົາກໍ່ຈະໄດ້: $b^2 = a^2 + c^2 - 4S \cotan B$ (2)	0,5
	$c^2 = a^2 + b^2 - 4S \cotan C$ (3)	0,5
	ເອົາ (1)+(2)+(3) ພາກຕໍ່ພາກເຮົາໄດ້: $a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 4S(\cotan A + \cotan B + \cotan C)$ ຖອນໄດ້ $\cotan A + \cotan B + \cotan C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$	0,5